

Epreuve de Mathématique

1. Informations concernant l'épreuve

Barème et mode de calcul note finale	1 point par question
Durée	1h30
Calculatrice autorisée	<i>NON</i>
Consignes pour les candidats	<i>Merci de ne rien marquer sur le sujet Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible Répondez sur la grille séparée Seules les grilles correctement remplies seront corrigées</i>

2. Enoncé de l'épreuve pages 2 à 4

3. Thématiques couvertes page 5

4. Feuille de réponses page 6

Epreuve écrite de Mathématiques

Durée : 1 heure 30 minutes

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Partie I

Pour a réel, on considère les équations différentielles suivantes :

- $y'' + 6y' + ay = 0$, notée (H_a) ,
- $y'' + 6y' + ay = 5at$, notée (E_a) .

Dans les questions 1) à 4), on prendra $a = 5$:

Dans les questions 5) à 8), on prendra $a = 10$:

- 1) La solution générale de (H_5) est la fonction suivante, où A et B sont des constantes réelles :
 - A) $t \mapsto y = A e^{-5t} + B$,
 - B) $t \mapsto y = A e^{-t} + B e^{-3t}$,
 - C) $t \mapsto y = A e^{-5t} + B e^{-t}$,
 - D) $t \mapsto y = A \cosh(3t) + B \sinh(3t)$.
- 2) La solution de (H_5) vérifiant les relations $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ est la fonction suivante, notée f :
 - A) $t \mapsto y = -2 e^{-5t} + 3e^{-t}$,
 - B) $t \mapsto y = 2 e^{-3t} - e^{-t}$,
 - C) $t \mapsto y = -2 e^{3t} + 3e^{-3t}$,
 - D) $t \mapsto y = 2e^{-t} - e^{-5t}$.
- 3) Sur \mathbb{R}_+ , la fonction f :
 - A) est strictement croissante,
 - B) admet un maximum en $t_0 = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$,
 - C) est strictement décroissante,
 - D) admet un maximum en $t_0 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.
- 4) Sur \mathbb{R}_+ , la fonction f :
 - A) ne change pas de signe,
 - B) change une fois de signe,
 - C) change deux fois de signe,
 - D) change trois fois de signe.
- 5) La solution générale de (H_{10}) est la fonction suivante, où A et B sont des constantes réelles :
 - A) $t \mapsto y = e^{-5t}(A \cos(3t) + B \sin(3t))$,
 - B) $t \mapsto y = e^{-3t}(A \cos(t) + B \sin(t))$,
 - C) $t \mapsto y = e^{-t}(A \cos(3t) + B \sin(3t))$,
 - D) $t \mapsto y = e^{-3t}(A t + B)$.
- 6) La solution de (H_{10}) vérifiant les relations $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$ est la fonction :
 - A) $t \mapsto y = e^{-3t}(\cos(t) - \sin(t))$,
 - B) $t \mapsto y = e^{-t}(2 \cos(t) - \sin(t))$,
 - C) $t \mapsto y = e^{-3t}(\cos(t) + \sin(t))$,
 - D) $t \mapsto y = e^{-3t} \cos(t)$.
- 7) Sur \mathbb{R}_+ , l'ensemble des points en lesquels la fonction définie dans la question 6) s'annule est caractérisé par :
 - A) $t_k = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*$,
 - B) $t_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
 - C) $t_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*$,
 - D) $t_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N}^*$.
- 8) L'équation différentielle (E_{10}) admet une solution particulière de la forme :
 - A) $t \mapsto y_p(t) = -5t - 3$,
 - B) $t \mapsto y_p(t) = -5t + 3$,
 - C) $t \mapsto y_p(t) = 5t - 3$,
 - D) $t \mapsto y_p(t) = 5t + 3$.

Partie II

Dans les questions 9) à 20), on considère :

- la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - \frac{1}{2}}{e^{x+1}}$,
- la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par : $x_0 = \ln(2)$, $I_0 = \int_{-x_0}^{x_0} dx$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{-x_0}^{x_0} f(x)^n dx$,
- la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p \cdot 2^p}$.

9) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout x réel, sa dérivée $f'(x)$ vaut :

- A) $\frac{1}{2} \frac{e^x - \frac{1}{2}}{(e^{x+1})^2}$,
- B) $\frac{3}{4} \frac{e^{-x}}{(e^{x+1})^2}$,
- C) $2 \frac{e^{-x+1}}{(e^{x+1})^2}$,
- D) $\frac{3}{2} \frac{e^x}{(e^{x+1})^2}$.

10) L'intégrale I_1 vaut :

- A) $\int_{1/2}^2 \frac{t - \frac{1}{2}}{t(t+1)} dt$,
- B) $\int_{1/2}^2 \frac{t - \frac{1}{2}}{t+1} dt$,
- C) $\int_{-1/2}^2 \frac{t - \frac{1}{2}}{t(t+1)} dt$,
- D) $\int_{-1/2}^2 \frac{t(t - \frac{1}{2})}{t+1} dt$.

11) Pour tout réel t strictement positif, la quantité $\frac{t - \frac{1}{2}}{t(t+1)}$ vaut :

- A) $\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}$,
- B) $\frac{2}{t+1} - \frac{1}{2t}$,
- C) $\frac{2}{2(t+1)} - \frac{1}{2t}$,
- D) $\frac{3}{2(t+1)} - \frac{1}{t}$.

12) L'intégrale I_1 vaut :

- A) $\ln(3) + \ln(2)$,
- B) $2\ln(3)$,
- C) $\frac{\ln(2)}{2}$,
- D) $\ln(3) - \frac{\ln(2)}{2}$.

13) Sur l'intervalle $J = [-x_0, x_0]$, la fonction f est :

- A) strictement croissante,
- B) d'abord croissante, puis décroissante,
- C) strictement décroissante,
- D) d'abord décroissante, puis croissante.

14) Pour tout x de J , on a :

- A) $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2)}{2}$,
- B) $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$,
- C) $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$,
- D) $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

15) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- A) $-\frac{\ln(2)}{2^n} \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$,
- B) $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{2^{n-1}}$,
- C) $\frac{1}{2^{n+1}} \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{2^n}$,
- D) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-2}} \leq I_n \leq 2^n$.

16) La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- A) converge vers $1/2$,
- B) converge vers $\ln(2)$,
- C) est divergente,
- D) converge vers 0.

17) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-x_0}^{x_0} f(x)^n f'(x) dx$ vaut :

- A) $\frac{(\ln(2))^n}{n+1}$,
- B) $\frac{n+1}{2^n}$,
- C) $\frac{(\ln(2))^n}{n}$,
- D) $\frac{1}{2^{n(n+1)}}$.

18) La relation $2(f(x))^2 - f(x) - 1 + 3f'(x) = 0$ est admise pour tout réel x . On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $2I_{n+2} - I_{n+1}$ vaut :

- A) $I_n - \frac{3}{2^{n+1}(n+1)}$,
- B) $-I_n + \frac{3}{2^n(n+1)}$,
- C) $2I_n - \frac{3(\ln(2))^n}{n+1}$,
- D) $I_n - \frac{3}{2^n(n+1)}$.

19) D'après la réponse à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a :

- A) $3(S_n - S_1) = I_0 + I_1 - I_{n-1} - I_n$,
- B) $3S_n = I_0 + 2I_1 - I_{n-1} - 2I_n$,
- C) $3S_n = I_0 + 2I_1 - I_n - 2I_{n+1}$,
- D) $3S_{n-1} = 2I_0 + 2I_1 - 2I_{n-1} - 2I_n$.

20) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers :

- A) $3 \ln(2)$,
- B) $2/3$,
- C) $\ln(2)$,
- D) $\ln(6)$.

Partie III

Dans les questions 21) à 30), on considère :

- un espace vectoriel E muni d'une base $B_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
- l'application linéaire f de E dans E , représentée dans la base B_0 par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$,
- la matrice I , matrice identité de dimension 3.

- 21) Soient les vecteurs $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} = f(\vec{u})$. On note (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les composantes respectives de \vec{u} et \vec{v} dans la base B_0 . Alors la quantité v_2 vaut :
- A) $\frac{2}{3}u_1 + 2u_3$,
 B) $u_1 + \frac{1}{6}u_3$,
 C) $\frac{1}{6}u_1 + u_3$,
 D) $2u_1 + \frac{2}{3}u_3$.
- 22) La matrice A^2 vaut :
- A) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
 B) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
 C) $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,
 D) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- 23) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la quantité A^{2k+1} vaut :
- A) $A - kI$,
 B) $(-A)^k + A - I$,
 C) $(-1)^k A$,
 D) A .
- 24) Le déterminant de la matrice A vaut :
- A) -3 ,
 B) -1 ,
 C) 0 ,
 D) 1 .
- 25) Soit P le polynôme caractéristique de la matrice A , défini par $P(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I)$. La quantité $P(\lambda)$ a pour expression :
- A) $-\lambda(1 - \lambda)^2$,
 B) $\lambda(1 - \lambda^2)$,
 C) $-\lambda(1 + \lambda)^2$,
 D) $(1 + \lambda)^2(1 - \lambda)$.
- 26) La matrice A possède comme vecteur propre le vecteur :
- A) $(3, 0, 1)$,
 B) $(1, 0, 3)$,
 C) $(6, 6, 1)$,
 D) $(6, -6, -1)$.
- 27) Le noyau de f est noté $\text{Ker}(f)$. Il est égal à :
- A) $\{\vec{0}\}$,
 B) $\text{Vect}\{(-3, 0, 1)\}$,
 C) $\text{Vect}\{(3, 0, 1)\}$,
 D) $\text{Vect}\{(3, 0, 1), (-3, 0, 1)\}$.
- 28) La matrice A est de rang :
- A) 0 ,
 B) 1 ,
 C) 2 ,
 D) 3 .
- 29) On admet que la matrice A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Cette propriété résulte du fait que :
- A) Toutes les valeurs propres de A sont réelles simples,
 B) A possède au moins une valeur propre réelle multiple,
 C) A est inversible,
 D) A est non inversible.
- 30) Dans l'écriture $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$:
- A) Les matrices D et P sont uniques,
 B) Une permutation des colonnes de P est possible sans modifier D ,
 C) Une permutation des termes diagonaux de D est possible sans modifier les colonnes de P ,
 D) Une permutation des termes diagonaux de D s'accompagne d'une permutation des colonnes de P .

Thématiques couvertes

Outils de base

- Trigonométrie
- Inégalités dans \mathbb{R}
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

Analyse, fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires à coefficients constants,

Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

Algèbre matricielle

- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation

Feuille de réponses :

Nom et Prénom

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

Question 1 : A B C D

Question 2 : A B C D

Question 3 : A B C D

Question 4 : A B C D

Question 5 : A B C D

Question 6 : A B C D

Question 7 : A B C D

Question 8 : A B C D

Question 9 : A B C D

Question 10 : A B C D

Question 11 : A B C D

Question 12 : A B C D

Question 13 : A B C D

Question 14 : A B C D

Question 15 : A B C D

Question 16 : A B C D

Question 17 : A B C D

Question 18 : A B C D

Question 19 : A B C D

Question 20 : A B C D

Question 21 : A B C D

Question 22 : A B C D

Question 23 : A B C D

Question 24 : A B C D

Question 25 : A B C D

Question 26 : A B C D

Question 27 : A B C D

Question 28 : A B C D

Question 29 : A B C D

Question 30 : A B C D

Corrigé

Epreuve de Mathématique

Question 1 : A B C D

Question 2 : A B C D

Question 3 : A B C D

Question 4 : A B C D

Question 5 : A B C D

Question 6 : A B C D

Question 7 : A B C D

Question 8 : A B C D

Question 9 : A B C D

Question 10 : A B C D

Question 11 : A B C D

Question 12 : A B C D

Question 13 : A B C D

Question 14 : A B C D

Question 15 : A B C D

Question 16 : A B C D

Question 17 : A B C D

Question 18 : A B C D

Question 19 : A B C D

Question 20 : A B C D

Question 21 : A B C D

Question 22 : A B C D

Question 23 : A B C D

Question 24 : A B C D

Question 25 : A B C D

Question 26 : A B C D

Question 27 : A B C D

Question 28 : A B C D

Question 29 : A B C D

Question 30 : A B C D