Epreuve Mathématique

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\,cos(x) - sin(x)$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Question 1) On peut restreindre l'étude de la fonction f sur
- A) $\mathbb{R}^+$
- B) $[0,2\pi]$
- C) $[0,\pi]$
- D) $[-\pi,\pi]$

Question 2) La courbe $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à
- A) la droite $(O,\vec{\imath})$
- B) la droite $(O,\vec{\jmath})$
- C) l'origine O
- D) la droite d'équation $y = x$

Question 3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
- A) $f'(x) = x\,cos(x)$
- B) $f'(x) = sin(x) - cos(x)$
- C) $f'(x) = -x\,sin(x)$
- D) $f'(x) = -x\,sin(x) - cos(x)$

Question 4) La fonction f a des optimums locaux en
- A) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, où k est un entier relatif
- B) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, où k est un entier relatif
- C) $x = k\pi$, où k est un entier relatif
- D) $x = (2k+1)\pi$, où k est un entier relatif

Question 5) Les points de $(\mathcal{C})$ dont l'ordonnée est un maximum local de f sont situés
- A) sur la droite d'équation $y = -x + 1$
- B) sur la droite d'équation $y = x$
- C) sur la droite d'équation $y = -x$
- D) sur la droite d'équation $y = x + 1$

On note I_n l'intervalle $[n\pi\,;(n+1)\pi[$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Question 6) La fonction f est strictement croissante sur I_n si
- A) n est pair
- B) n est impair
- C) $\exists k \in \mathbb{N}, n = 4k + 1$
- D) $\exists k \in \mathbb{N}, n = 4k + 3$

Question 7) Dans I_n l'équation $f(x) = 0$
- A) n'admet aucune solution
- B) admet une et une seule solution
- C) admet deux solutions
- D) admet une infinité de solutions

Soit $x_n \in I_n$ une solution de $f(x) = 0$.

Question 8) On a
- A) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < (2n+1)\frac{\pi}{2}$
- B) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > (2n+1)\frac{\pi}{2}$
- C) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
- D) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\frac{\pi}{2}$

Question 9) On a
- A) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \arctan(x_n)$
- B) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi$
- C) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \arctan(x_n)$
- D) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi + \arctan(x_n)$

Question 10) Quand $n \to +\infty$, la suite de terme général x_n est équivalente à
- A) $(2n+1)\pi$
- B) $2n\pi$
- C) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$
- D) $\frac{\pi}{2}$

Partie II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On considère les applications linéaires f et g de E dans E.
Leurs matrices représentatives dans cette base $\mathcal{B}$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \epsilon E$.

Question 11) Le déterminant de A est

A) 4
B) 2
C) 0
D) -1

Question 12) La famille $\mathcal{B}_1 = \big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$

A) est liée
B) forme une base de E
C) engendre un sous-espace vectoriel de dimension 1
D) engendre un sous-espace vectoriel de dimension 2

Question 13) Le système $AX = b$

A) n'a pas de solution
B) admet une solution unique
C) a pour ensemble de solutions un sous-espace vectoriel de dimension 1
D) a pour ensemble de solutions un sous-espace vectoriel de dimension 2

Question 14) Le système $AX = b$ est équivalent à

A) $X = JX + \frac{1}{2}b$
B) $X = JX$
C) $X = JX + b$
D) $AX = JX$

Question 15) Les valeurs propres de J sont

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) $0, \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) 0 et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Question 16) On désigne par I la matrice identité de dimension 3. On a la relation

A) $A = J + I$
B) $A = I - J$
C) $A = 2I + 2J$
D) $A = 2I - 2J$

Question 17) Si λ est une valeur propre de J, on a alors

A) $\lambda + 1$ est une valeur propre de A
B) $\lambda - 1$ est une valeur propre de A
C) $2 + 2\lambda$ est une valeur propre de A
D) $2 - 2\lambda$ est une valeur propre de A

Question 18) Si u est un vecteur propre de J, alors

A) $u + e_1$ est un vecteur propre de A
B) $u - e_1$ est un vecteur propre de A
C) u est un vecteur propre de A
D) $u + 2e_1$ est un vecteur propre de A

On considère les matrices suivantes :

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Question 19) On a les relations suivantes

A) $J = PDP$ et $A = PDP$
B) $J = PDP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$
C) $J = PD\,{}^tP$ et $A = P(2I - 2D)\,{}^tP$ et ${}^tP = P^{-1}$
D) $J = PD\,{}^tP$ et $A = PD\,{}^tP$ et ${}^tP = P^{-1}$

Soit Q une (ou la) solution du système $AX = b$. On définit $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs de E par :

$$\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \forall n \epsilon \mathbb{N}, X_{n+1} = JX_n + \dfrac{1}{2}b \end{cases}$$

On définit la suite $(Y_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ par $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_n = X_n - Q$

Question 20) La suite $(Y_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ vérifie

A) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_{n+1} = JY_n + \frac{1}{2}b$
B) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_{n+1} = JY_n + b$
C) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_{n+1} = JY_n$
D) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_{n+1} = JY_n - b$

Question 21) La suite $(Y_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ vérifie

A) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_n = P\,D^n\,{}^tPY_0 + \frac{1}{2}b$
B) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_n = P\,D^n\,{}^tPY_0 + b$
C) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_n = P\,D^n\,{}^tPY_0$
D) $\forall n \epsilon \mathbb{N}, Y_n = P\,D^n\,{}^tPY_0 - b$

Question 22) La suite $(\|Y_n\|)_{n\epsilon\mathbb{N}}$, où $\|u\|$ désigne la norme euclidienne de u,

A) est divergente
B) converge vers $\sqrt{2}$
C) converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) converge vers 0

Question 23) La suite $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

A) n'est pas convergente
B) converge vers $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
C) converge vers $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
D) converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Partie II

On considère l'équation différentielle suivante, qu'on note (E)

$$u''(r) + \frac{2}{r} u'(r) + \omega^2\, u(r) = 0$$

Soit v la fonction définie par $v(r) = r.u(r)$

Question 24) La fonction v vérifie

A) $v''(r) + v(r) = 0$
B) $v''(r) - v(r) = 0$
C) $v''(r) + \omega^2\, v(r) = 0$
D) $v''(r) - \omega^2\, v(r) = 0$

Question 25) La solution générale de l'équation vérifiée par v s'écrit

A) $v(r) = \cos(\omega r + \phi)$ où $\phi \in [0, 2\pi]$
B) $v(r) = \cos(\omega r) + \sin(\omega r)$
C) $v(r) = \sin(\omega r + \phi)$ où $\phi \in [0, 2\pi]$
D) $v(r) = A\cos(\omega r) + B\sin(\omega r)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Question 26) Si $r \neq 0$, alors la solution générale de (E) s'écrit

A) $u(r) = \frac{\cos(\omega r+\phi)}{r}$ où $\phi \in [0, 2\pi]$
B) $u(r) = \frac{\cos(\omega r)+\sin(\omega r)}{r}$
C) $u(r) = \frac{\sin(\omega r+\phi)}{r}$ où $\phi \in [0, 2\pi]$
D) $u(r) = A\frac{\cos(\omega r)}{r} + B\frac{\sin(\omega r)}{r}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Question 27) Les solutions non nulles de (E), prolongeables par continuité en $r = 0$, sont :

A) $u(r) = \frac{\cos(\omega r)}{r}$
B) $u(r) = \frac{\cos(\omega r)+\sin(\omega r)}{r}$
C) $u(r) = A\frac{\cos(\omega r)}{r}$, où $A \in \mathbb{R}$
D) $u(r) = B\frac{\sin(\omega r)}{r}$, où $B \in \mathbb{R}$

Question 28) On conserve pour la suite la solution obtenue à la question 27). On impose la condition initiale $u'(1) = 0$. On a alors la relation suivante, qu'on notera par la suite (Ω),

A) $\omega = \sin(\omega)$
B) $\omega = \cos(\omega)$
C) $\omega = \tan(\omega)$
D) $\omega = \mathrm{cotan}(\omega)$

Question 29) L'équation (Ω), vérifiée par ω, de la question précédente,

A) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
B) a une seule solution dans $\mathbb{R}$
C) a une et une seule solution dans chaque intervalle $[n\pi\,; (n+1)\pi[$, où $n \in \mathbb{N}$
D) a plusieurs solutions dans chaque intervalle $[n\pi\,; (n+1)\pi[$, où $n \in \mathbb{N}$

Question 30) Si ω_1 et ω_2 sont deux solutions distinctes de (Ω), on note u_1 et u_2 les deux solutions de (E) associées, respectivement à ω_1 et ω_2. On pose $I = \int_0^1 u_1(r)\ u_2(r)\, r^2 dr$. On a alors

A) $I = \pi$
B) $I = \frac{\pi}{2}$
C) $I = 1$
D) $I = 0$

Feuille de réponses

Epreuve Mathématique

Nom et Prénom
……………………………………………………………..

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

Question 1 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 2 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 3 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 4 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 5 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 6 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 7 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 8 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 9 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 10 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 11 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 12 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 13 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 14 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 15 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 16 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 17 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 18 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 19 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 20 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 21 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 22 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 23 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 24 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 25 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 26 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 27 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 28 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 29 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 30 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

<u>Correction Mathématiques</u>

Question 1 : A ■ B ☐ C ☐ D ☐

Question 2 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 3 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 4 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 5 : A ☐ B ■ C ☐ D ☐

Question 6 : A ☐ B ■ C ☐ D ☐

Question 7 : A ☐ B ■ C ☐ D ☐

Question 8 : A ■ B ☐ C ☐ D ☐

Question 9 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■

Question 10 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 11 : A ■ B ☐ C ☐ D ☐

Question 12 : A ☐ B ■ C ☐ D ☐

Question 13 : A ☐ B ■ C ☐ D ☐

Question 14 : A ■ B ☐ C ☐ D ☐

Question 15 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 16 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■

Question 17 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■

Question 18 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 19 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 20 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 21 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 22 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■

Question 23 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 24 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 25 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■

Question 26 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■

Question 27 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■

Question 28 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 29 : A ☐ B ☐ C ■ D ☐

Question 30 : A ☐ B ☐ C ☐ D ■