Epreuve écrite de Mathématiques

Informations sur l'épreuve

Barème :	/30
Durée :	90 min
Calculatrice autorisée :	Non

Merci de ne rien marquer sur le sujet.
Répondez sur une feuille de réponse séparée.
Uniquement les feuilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Epreuve écrite de Mathématiques

Durée : 1 heure 30 minutes

Dans cette épreuve, on demande d'indiquer si chaque affirmation proposée est vraie ou fausse.
Dans le cas d'une réponse fausse, l'écriture du résultat correct correspondant peut s'avérer utile pour le traitement des questions suivantes.
Dans l'énoncé, les vecteurs sont notés en caractères gras.

On considère les équations différentielles suivantes :

- $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0$, notée (H),
- $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=-4t^2-2$, notée (E).

1) La solution générale de (H) est la fonction $t \mapsto y(t)=Ate^{-2t}$, où A est une constante réelle.

2) La fonction $t \mapsto y(t)=(1-t)e^{-2t}$ est la seule solution de (H) telle que $y(0)=1$ et $y(1)=0$.

3) La fonction $t \mapsto y(t)=-2+2t-t^2+2e^{-2t}$ est une solution particulière de (E).

4) La solution générale de (E) est la fonction $t \mapsto y(t)=-2-t^2+(At+B)e^{-2t}$, où A et B sont des constantes réelles.

5) Toute solution y de (E) est telle que $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)=-\infty$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4\cos x+\sin 2x}{1+\sin^2 x}$. Pour X réel, on définit la quantité $I(X)=\displaystyle\int_0^X f(x)dx$.

6) La fonction $u \mapsto F_1(u)=\ln\left(1+u^2\right)$ est une primitive de la fonction $u \mapsto f_1(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$.

7) La fonction $u \mapsto F_2(u)=\arctan\left(u\right)$ est une primitive de la fonction $u \mapsto f_2(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$.

8) Pour tout réel x, on a les relations $\sin(2x)=\sin x\cos x$ et $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

En posant $u = \sin x$, on écrit $I(X) = J(U) = \int_0^U g(u)du$.

9) La fonction g est définie sur • par $g(u) = \dfrac{4+u}{1+u^2}$.

10) On a les relations $U = \sin(X)$ et $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

11) On a la relation $I\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ln 2 + \pi$.

On considère la fonction *f* définie sur • par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+2x}{1+2x+2x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \ln(1+2x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Soit Γ sa courbe représentative dans un repère R = (O ; **i**, **j**).

12) La fonction *f* est définie et continue sur • .

13) La fonction *f* est dérivable sur •* avec : $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x(1+x)}{1+2x+2x^2} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{1+2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

14) La fonction *f* n'est pas dérivable en 0.

15) $x_0 = -1$ est un minimum local de *f*.

Dans les deux questions suivantes, on mène pour $x > 0$, une étude de *f* au voisinage de 0.

16) Pour $x > 0$, on a $\ln(1+x) = x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ et $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right)$.

17) Pour $x > 0$, au voisinage de 0, la courbe Γ est située au-dessus de sa demi-tangente à droite en 0.

18) Soient les réels $a = -2$ et $b = 0$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un unique réel $c \in \,]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$.

19) La série de terme général $u_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 + \dfrac{2}{n}$ est convergente.

20) L'intégrale $I = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge.

Soit un espace vectoriel E muni d'une base $B_0 = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$.

On considère les applications linéaires f et g de E dans E. Leurs matrices représentatives dans la base B_0 sont respectivement $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = 2A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, où I désigne la matrice identité de dimension 3.

21) Soit le vecteur $\mathbf{u} \in E$ et $\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$. On note (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les composantes respectives de **u** et **v** dans la base B_0. Alors, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} v_1 = -u_3 \\ v_2 = u_1 - u_2 - u_3 \\ v_3 = -u_3 \end{cases}$$

22) L'application linéaire $h = g \circ f$ de E dans E est représentée dans la base B_0 par la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23) La matrice A est de rang 1.

24) On a les relations $B^2 = I$ et $A^2 = A$.

25) Pour tout entier naturel non nul k, on a les relations $B^{2k} = I$, $B^{2k+1} = B$, $A^{2k} = -A$ et $A^{2k+1} = A$.

26) Si λ est une valeur propre de la matrice A, alors $\lambda' = 2\lambda + 1$ est une valeur propre de la matrice B.

27) Les valeurs propres de la matrice B sont -1 et 1.

28) $-\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ est un vecteur propre de A et de B.

29) La matrice B est diagonalisable dans · .

30) L'application linéaire g est une symétrie vectorielle par rapport à un plan.

Epreuve écrite de Mathématiques

Réponses

VRAI : questions 2, 3, 7, 11, 12, 14, 15, 17, 19, 22, 25, 26, 27, 28, 29.

FAUX : questions 1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 30.